FIS00183 - Física III-C - Aula 22

Jeferson J. Arenzon – 22 de outubro de 2020

Ondas Estacionárias

As ondas progressivas se propagam e transportam energia de um ponto a outro. Mas quando temos ondas andando em direções opostas, seja numa corda finita ou infinita, é possível criar uma onda que é **estacionária**, não se propaga nem transporta energia. Vamos começar pelo caso da corda infinita, em que duas ondas, com amplitudes e comprimentos de onda iguais, interferem. Podemos utilizar o princípio de superposição para analisar o que ocorre:

$$y_1(x,t) = y_0 \sin(kx - wt) \tag{85}$$
$$y_2(x,t) = y_0 \sin(kx + wt). \tag{86}$$

Então:

$$\begin{aligned} y'(x,t) &= y_1(x,t) + y_2(x,t) \\ &= y_0 \sin(kx - wt) + y_0 \sin(kx + wt) \\ &= \underbrace{2y_0 \sin(kx)}_{\text{amplitude}} \cos(\omega t). \end{aligned} \tag{87}$$

Como não é uma função de $kx - \omega t$, **não** é uma onda progressiva. Além disso, a amplitude depende da posição[106]. Assim, existem pontos onde a amplitude é sempre nula (nodos) ou sempre máxima (antinodos), além, claro, de todos os valores intermediários.

- **Nodos**:

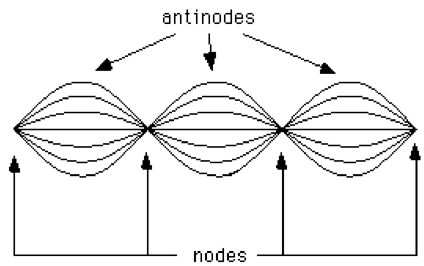
$$\sin(kx) = 0 \Longrightarrow kx_n = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \to \frac{2\pi}{\lambda} x_n = n\pi \to x_n = \frac{n\lambda}{2}$$

- **Antinodos**:

$$x_n = \frac{n\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$$

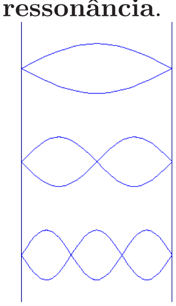
pois o anti-nodo está deslocado de $\lambda/4$ do nodo[107].



Numa onda estacionária não há transmissão de energia: a energia carregada por uma onda em uma das direções é compensada pela energia transmitida pela outra onda na direção oposta. Além disso, temos alternância entre energia cinética e potencial, mantendo a energia total constante. Considere a região entre dois nodos consecutivos. Quando a corda está totalmente na horizontal, seu comprimento é o orignal e a energia é completamente cinética. Quando ela apresenta o maior distanciamento da posição horizontal (nos instantes em que $|\cos(\omega t)| = 1$), a energia cinética é nula e o comprimento é o máximo possível (energia potencial elástica máxima).

Ressonância

Consideremos agora uma corda fixa em uma extremidade e posta a oscilar através de um vibrador na outra extremidade (e, portanto, finita). Os pulsos que viajam nos dois sentidos (pois refletem nas paredes) interferem e, para determinadas frequências (**frequência ressonante**), surge uma **onda estacionária** (ou **modo de oscilação**). Esta onda é dita ocorrer na **ressonância**.



$L = \dfrac{\lambda}{2}$

$L = \lambda = 2\dfrac{\lambda}{2}$

$L = 3\dfrac{\lambda}{2}$

Para outras frequências que não as ressonantes, vemos somente algumas pequenas oscilações, sem um padrão estacionário.

[106] Poderíamos ainda considerar o caso mais geral onde os comprimentos de onda são diferentes:

$$y_0 \left[\sin(k_1 x - wt) + \sin(k_2 x - wt)\right] = 2y_0 \sin\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x\right)\cos\left(\omega t + \frac{k_2 - k_1}{2}x\right)$$

Ainda teremos uma amplitude dependente da posição, mas agora aparece uma constante de fase dependente da posição.

[107] Ou, equivalentemente:

$$|\sin(kx)| = 1 \Longrightarrow kx = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \to x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}.$$

[108] Em música, cada um dos harmônicos é chamado de **sobretom**, f_2 é o primeiro sobretom, e assim por diante.

Assim, no n-ésimo modo temos n estruturas (corcovas). Portanto,

$$L = n\frac{\lambda}{2} \Longrightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n} = \frac{\lambda_1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{88}$$

A frequência:

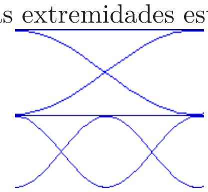
$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{nv}{2L}. \tag{89}$$

Para $n = 1$ temos o **primeiro harmônico**:

$$f_1 = \frac{v}{2L} \Longrightarrow f_n = nf_1 \tag{90}$$

onde f_n define a **série harmônica**[108].

Exatamente a mesma equação é válida no caso em que as duas extremidades estão livres:



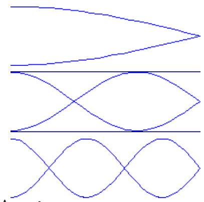
$$L = \frac{\lambda}{2} \rightarrow \lambda = 2L$$

$$L = \lambda \rightarrow \lambda = \frac{2L}{2}$$

Assim:

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{91}$$

Por outro lado, quando somente uma das extremidades está livre:



$$L = \frac{\lambda}{4} \rightarrow \lambda = 4L$$

$$L = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} = \frac{3\lambda}{4} \rightarrow \lambda = \frac{4L}{3}$$

$$L = \lambda + \frac{\lambda}{4} = \frac{5\lambda}{4} \rightarrow \lambda = \frac{4L}{5}$$

Assim:

$$\lambda_n = \frac{4L}{n}, \quad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{92}$$

Neste caso temos somente os harmônicos ímpares.

Exemplo 51: Em um tubo vertical de 1 m, podemos regular o nível de água em qualquer posição do tubo. Um diapasão ($f = 686\,\mathrm{Hz}$) é colocado na extremidade superior do tubo, que é aberta. Para quais posições do nível há ressonância?

Como

$$\lambda_n = \frac{4L}{n} = \frac{v}{f},$$

e obtemos, usando $v = 343\,\mathrm{m/s}$,

$$L = \frac{nv}{4f} = \frac{n}{8},$$

com $n = 1, 3, 5, \ldots$, Assim, os possíveis valores menores do que 1 m são $L = 1/8$, $3/8$, $5/8$ e $7/8\,\mathrm{m}$.
