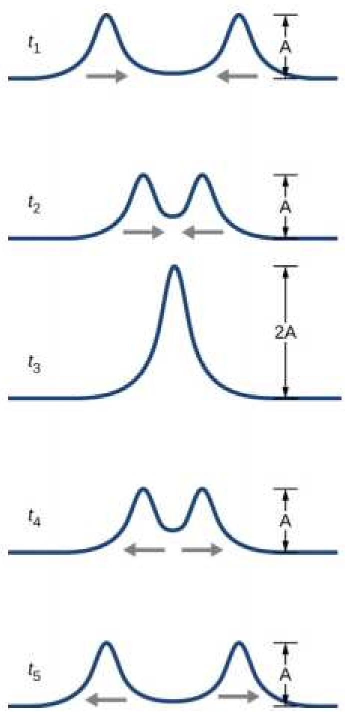
FIS00183 - Física III-C - Aula 21

Jeferson J. Arenzon – 20 de outubro de 2020

Princípio de Superposição

O que ocorre quando duas ondas passam pela mesma região do espaço?



A **onda resultante** é a soma algébrica das duas ondas:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t).$$

Este é um exemplo do **Princípio de Superposição**: quando vários efeitos ocorrem simultaneamente, o efeito resultante é a soma dos efeitos individuais[103], como ilustrado na figura acima. Ou seja, as ondas são independentes umas das outras (senão teríamos termos de mistura). Vamos analisar várias situações em que a combinação de duas ondas levam a novos fenômenos físicos.

Interferência de Ondas

Vamos considerar duas ondas viajando na mesma direção. Ambas possuem o mesmo ω, k e y_0,

$$y_1(x,t) = y_0 \sin(kx - wt) \tag{79}$$
$$y_2(x,t) = y_0 \sin(kx - wt + \phi), \tag{80}$$

a única diferença entre elas é a **constante de fase** ϕ.

Pelo princípio de superposição:

$$\begin{aligned} y'(x,t) &= y_1(x,t) + y_2(x,t) \\ &= y_0 \sin(kx - wt) + y_0 \sin(kx - wt + \phi) \end{aligned}$$

Usando a relação trigonométrica[104]:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Então:

$$y'(x,t) = \underbrace{2y_0 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)}_{y_0'(x)} \underbrace{\sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)}_{-1<\ldots<1} \tag{81}$$

Notem que a dependência em $kx - \omega t$ se mantém, ou seja, a onda resultante também é progressiva. Além disso, a onda resultante está defasada em relação às duas ondas originais, ficando exatamente entre as duas ($\phi/2$).

Vamos considerar alguns casos especiais:

- $\phi = 0$ (ondas **em fase**):

$$y_0' = 2y_0 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = 2y_0$$
$$y'(x,t) = 2y_0 \sin(kx - \omega t)$$

  Esta é uma **interferência completamente construtiva**.

- $\phi = \pi$ (ondas **fora de fase**):

$$y_0' = 0$$
$$y'(x,t) = 0$$

  Esta é uma **interferência completamente destrutiva**.

[103] Se duas ondas, $y_1(x,t)$ e $y_2(x,t)$, são soluções da equação da onda, sua combinação linear, $y(x,t) = a_1 y_1(x,t) + a_2 y_2(x,t)$ também é. Isto é consequência do caráter linear da equação da onda:

$$\nabla^2 y = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \ldots + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Podemos generalizar para n ondas:

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{n} y_i(x,t).$$

Além disso, qualquer onda (qualquer função, com pequenas restrições) pode ser representada por uma série (infinita) de ondas senoidais (série de Fourier).

[104] Podemos demonstrá-la facilmente partindo das identidades $\exp(\pm ix) = \cos x \pm i \sin x$.

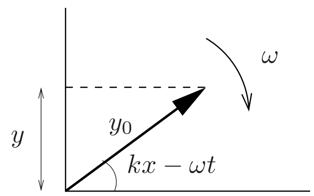
Notem que $\phi = 2\pi$ corresponde a um deslocamento de um comprimento de onda e é equivalente ao caso $\phi = 0$. Para valores intermediários, $0 < \phi < \phi$, a onda resultante apresenta interferência que interpola entre os casos acima, com $0 < y'_0 < 2y_0$.

Fasores

Também podemos representar uma onda **vetorialmente**:

$$\text{módulo} = \text{amplitude da onda}$$

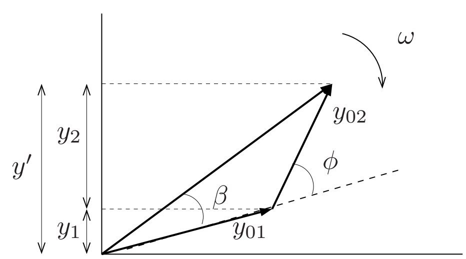
Este vetor gira ao redor de uma certa origem com velocidade angular ω igual à frequência da onda. Por exemplo, a onda $y(x,t) = y_0 \sin(kx - \omega t)$ pode ser representada como:



Para duas ondas que viajam na mesma direção em uma corda:

$$y_1(x,t) = y_{01}\sin(kx - wt) \tag{82}$$
$$y_2(x,t) = y_{02}\sin(kx - wt + \phi) \tag{83}$$

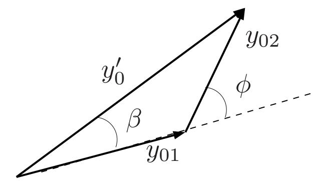
Note que agora as amplitudes podem ser diferentes. Podemos representar a soma (superposição) destas duas ondas como a soma de dois vetores:



Note que se a constante de fase do primeiro vetor não fosse nula, na figura acima ao invés de ϕ teríamos a diferença entre as duas constantes de fase. Podemos somar estes vetores porque k e ω são iguais nas duas ondas, caso contrário, os dois vetores não seriam estacionários um em relação ao outro[105]. Assim, somando-os:

$$y'(x,t) = y'_0 \sin(kx - wt + \beta)$$

Onde β é a constante de fase relativa ao primeiro vetor (cuja constante de fase, neste caso, é zero). Da figura:



$$\begin{aligned} y'_0 \cos\beta &= y_{01} + y_{02}\cos\phi \\ y'_0 \sin\beta &= y_{02}\sin\phi \end{aligned}$$

De onde obtemos β:

$$\tan\beta = \frac{y_{02}\sin\phi}{y_{01} + y_{02}\cos\phi} \tag{84}$$

Uma vez conhecido β, também obtemos y'_0 a partir do sistema de equações.

Exemplo 49:

Sejam duas ondas na mesma direção, com o mesmo λ, amplitudes de $y_{01} = 4\,\text{mm}$ e $y_{02} = 3\,\text{mm}$ e fases $\phi_1 = 0$ e $\phi_2 = \pi/3\,\text{rad}$. Obtenha β e y'_0.

$$\begin{aligned} \tan\beta &= \frac{3\sin(\pi/3)}{4 + 3\cos(\pi/3)} = \frac{3\sqrt{3}}{11} \to \beta = 0.44\,\text{rad} \\ y'_0 &= y_{02}\frac{\sin\phi}{\sin\beta} = 3\frac{\sin\pi/3}{\sin 0.44} \simeq 6.1\,\text{mm} \end{aligned}$$

Exemplo 50:

Sejam duas ondas na mesma direção e com mesma amplitude y_0, mas defasadas de $\pi/2\,\text{rad}$. Obtenha a onda resultante.

$$\tan\beta = \frac{y_0\sin(\pi/2)}{y_0 + y_0\cos(\pi/2)} = 1 \to \beta = \frac{\pi}{4}\,\text{rad}$$
$$y'_0 = y_0\frac{\sin(\pi/2)}{\sin(\pi/4)} = y_0\sqrt{2}$$

---

[105] A onda, ou vetor, resultante, acompanha os outros dois a medida que estes giram ao redor da origem. Portanto, também será uma função periódica, de mesmo comprimento de onda e mesmo período.