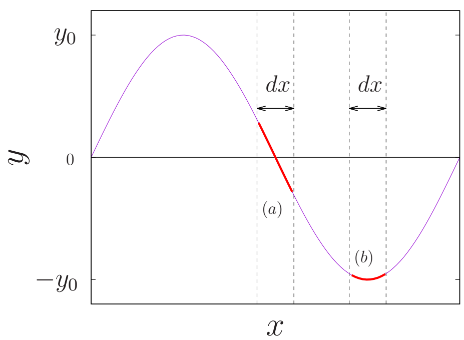
FIS00183 - Física III-C - Aula 20

Jeferson J. Arenzon – 15 de outubro de 2020

Energia e Potência

A energia fornecida à corda quando esta foi posta em movimento é transportada pela onda, tanto na forma de energia cinética quanto de energia potencial, à medida que esta se propaga. A energia cinética está associada ao movimento oscilatório dos elementos de massa na direção transversal e a energia potencial à dilatação da corda. À medida que a onda viaja, a tensão na corda realiza trabalho no elemento vizinho e vai tansferindo a energia. Na figura abaixo, vemos que um elemento da corda de amplitude dx altera seu comprimento (e forma) para se encaixar na forma senoidal que passa por ele. À essa variação no comprimento associamos uma energia potencial, como na mola.



Quando o elemento de corda está em $y = y_0$ (b), seu comprimento é dx (e sua energia potencial é nula, pois o elemento de corda não está esticado) ao passo que o comprimento (e a energia potencial) é máximo para $y = 0$ (a). Assim, o elemento de corda tem sua máxima energia cinética e máxima energia potencial quando se encontra no ponto $y = 0$, enquanto que os elementos no ponto $y = y_0$ temos um mínimo de energia.

Para um elemento de massa dm, a energia cinética associada à sua velocidade transversal v_t é

$$dK = \frac{1}{2} dm\, v_t^2.$$

Como $y(x,t) = y_0 \sin(kx - \omega t)$,

$$v_t = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_0 \cos(kx - \omega t),$$

então:

$$dK = \frac{1}{2} dm \omega^2 y_0^2 \cos^2(kx - \omega t) = \frac{1}{2} \mu dx \omega^2 y_0^2 \cos^2(kx - \omega t).$$

A energia cinética distribuída sobre um comprimento de onda pode ser obtida integrando a expressão acima sobre um comprimento de onda completo[101]:

$$\int_0^{K_\lambda} dK = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2 \underbrace{\int_0^\lambda \cos^2(kx - \omega t) dx}_{\lambda/2} \tag{77}$$

$$K_\lambda = \frac{1}{4} \mu \omega^2 y_0^2 \lambda. \tag{78}$$

Energia potencial também é carregada ao longo da corda pela onda, uma vez que a onda deve necessariamente esticar a corda. Como cada elemento de massa executa um MHS[102], o análogo da constante elástica da mola é $\omega^2 dm$ e a distância da posição de equilíbrio é y:

$$dU = \frac{1}{2} \omega^2 dm\, y^2(x,t) = \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\mu dx}_{dm} \underbrace{y_0^2 \sin^2(kx - \omega t)}_{y(x,t)}$$

A energia potencial espalhada sobre um comprimento de onda é

$$\int_0^{U_\lambda} dU = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2 \underbrace{\int_0^\lambda \sin^2(kx - \omega t) dx}_{\lambda/2}$$

$$U_\lambda = \frac{1}{4} \mu \omega^2 y_0^2 \lambda,$$

que é igual ao valor da energia cinética acumulada num comprimento de onda, $U_\lambda = K_\lambda$. A energia total ao longo de um comprimento de onda é, portanto:

$$E_\lambda = K_\lambda + U_\lambda = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2 \lambda,$$

[101] Notem que ao fazer a integral em x, estamos considerando um tempo fixo, assim o termo ωt no argumento do cosseno é irrelevante: é somente uma constante somada ao ângulo kx, que não afeta a integral que dá uma volta completa nesse ângulo. Assim:

$$\int_0^\lambda \cos^2(kx - \omega t) dx = \int_0^\lambda \cos^2(kx) dx = \frac{\lambda}{2}.$$

[102] Num MHS (sistema massa-mola), a energia potencial depende da distância x da massa até a posição de equilíbrio:

$$U = \frac{1}{2} k x^2,$$

onde k é a constante elástica da mola. A frequência de oscilação é

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \longrightarrow k = \omega^2 m.$$

e a potência transportada pela onda (o tempo que um pacote de energia do tamanho de um comprimento de onda leva para passar é o período) é

$$P = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 y_0^2 \underbrace{\frac{\lambda}{T}}_{v} \rightarrow \boxed{P = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 y_0^2}.$$

A potência depende de propriedades do meio, μ e v, e da onda, ω e y_0.

Exemplo 47: Vamos tomar $\mu = 525\,\mathrm{g/m}$, $T = 45\,\mathrm{N}$, $f = 120\,\mathrm{Hz}$ e $y_0 = 8.5\,\mathrm{mm}$. Qual a potência média dissipada?

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi f = 754\,\mathrm{rad/s} \\ v &= \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = 9.26\,\mathrm{m/s} \\ \overline{P} &= 100\,\mathrm{W} \end{aligned}$$
