FIS00183 - Física III-C - Aula 19

Jeferson J. Arenzon – 13 de outubro de 2020

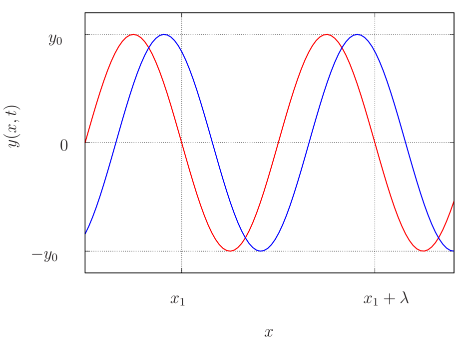
Ondas Harmônicas

Se ao invés de um pulso tivermos uma sequência harmônica (a extremidade se move em MHS, com uma única frequência), temos a propagação de um **trem de ondas** senoidal ao longo da corda:

$$y(x,t) = y_0 \sin[k(x - vt)] \tag{70}$$

onde y_0 é a amplitude. Como o argumento de uma função trigonométrica é adimensional, precisamos multiplicar $x - vt$, cuja dimensão é L, por uma quantidade (k), cuja dimensão é L^{-1}. Vamos analisar esta equação. Fixando $t = 0$, podemos ver a dependência na posição:

$$y(x,0) = y_0 \sin kx$$



Pela periodicidade da função:

$$y(x,0) = y(x + \lambda, 0)$$

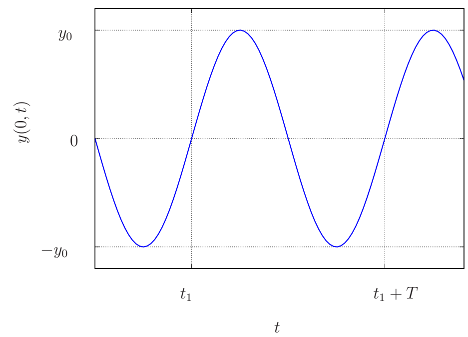
onde a distância entre dois picos (por exemplo) é o **comprimento de onda**, λ. Então:

$$\begin{aligned} y_0 \sin kx_1 &= y_0 \sin k(x_1 + \lambda) \\ kx_1 + 2\pi &= k(x_1 + \lambda) \Longrightarrow \boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}} \end{aligned}$$

onde k é o número de onda. Fisicamente, o número de onda representa uma densidade de picos num certo intervalo: se o comprimento de onda é pequeno, o número de onda é grande e vice-versa.

Para uma posição fixa ($x = 0$):

$$y(0,t) = y_0 \sin(-kvt) = -y_0 \sin(kvt)$$



Note que a distância entre dois picos (por exemplo) é o **período** da onda (T). Explorando a periodicidade da função:

$$\begin{aligned} y(0,t) &= y(0, t+T) \\ -y_0 \sin(kvt) &= -y_0 \sin[kv(t+T)] \\ kvt + 2\pi &= kvt + kvT \\ 2\pi &= kvT \\ T &= \frac{2\pi}{kv} = \frac{1}{f}. \end{aligned}$$

Logo:

$$kv = 2\pi f = \omega \rightarrow \boxed{\omega = kv} \tag{71}$$

Também:

$$2\pi f = \frac{2\pi}{\lambda} v \Longrightarrow \boxed{v = \lambda f} \tag{72}$$

A função de onda pode ser escrita como[100]

$$y(x,t) = y_0 \sin(kx - \omega t) \tag{73}$$

O argumento entre parênteses é chamado de **fase**. Portanto, no caso mais geral (com uma certa liberdade em relação às condições iniciais), temos:

$$\boxed{y(x,t) = y_0 \sin(kx - \omega t + \phi)} \tag{74}$$

Para o caso de uma onda que se move para a esquerda: $v \rightarrow -v$. Logo

$$y(x,t) = y_0 \sin(kx + \omega t) \tag{75}$$

Exemplo 45: Qual a velocidade transversal de um elemento da corda em (x,t)?

$$v_t(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -y_0 \omega \cos(kx - \omega t)$$

E qual a aceleração transversal?

[100] Outro modo de encontrar a velocidade da onda é tomar um ponto **da onda** (que mantém fixo o seu y), isto é:

$$kx - \omega t = \text{cte} \rightarrow k\frac{dx}{dt} - \omega = 0 \rightarrow kv = \omega \Longrightarrow v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{k} \rightarrow v = \lambda f$$

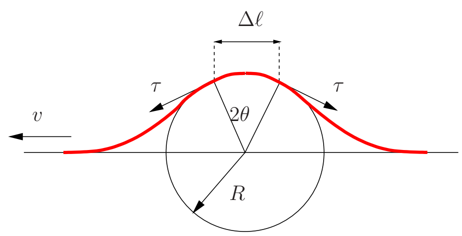
$$a_t = \frac{\partial v_t}{\partial t} = -\omega^2 y_0 \sin(kx - \omega t) = -\omega^2 y(x,t)$$

Notem que esta equação descreve um MHS pois a aceleração (e portanto a força) é proporcional ao deslocamento da posição de equilíbrio e tem caráter restaurador.

Velocidade da onda numa corda esticada

Vimos que existe uma relação entre v, λ e f. Porém a velocidade é determinada pelo **meio** onde se propaga a onda.

Vamos analisar um pulso de onda num sistema de referência que seja estacionário. Neste sistema a corda parece ir da direita para a esquerda.



Consideremos um segmento $\Delta\ell$ do pulso, formando um arco de um círculo de raio R. Em cada extremidade o segmento é puxado com uma tensão τ (tangencial) da corda. As componentes horizontais se cancelam e as verticais se somam (força restauradora):

$$F = 2\tau \sin\theta \simeq 2\tau\theta = \tau\frac{\Delta\ell}{R}$$

onde usamos que o arco ($\Delta\ell$) dividido pelo raio (R) nos dá o ângulo (2θ). A massa do segmento é

$$\Delta m = \mu\Delta\ell$$

onde μ é a densidade linear. Além disso, o elemento da corda está realizando um movimento circular:

$$a = \frac{v^2}{R}\ .$$

Combinando as três equações na segunda lei de Newton:

$$\tau\frac{\Delta\ell}{R} = \mu\Delta\ell\frac{v^2}{R} \rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}} \tag{76}$$

Então, a velocidade da onda depende somente das propriedades da corda e não da frequência. A frequência da onda é determinada pelo movimento que gera a onda na corda.

Exemplo 46: Uma corda de comprimento L é suspensa verticalmente a partir do teto. Na extremidade inferior, um pulso é emitido para cima. Mostre que o tempo necessário para este atingir a extremidade superior é $2\sqrt{L/g}$.

Como a tensão num ponto y é devida ao pedaço de corda abaixo de tal ponto, $\tau(y) = \mu g y$. Assim:

$$v(y) = \sqrt{\frac{\tau(y)}{\mu}} = \sqrt{yg} = \frac{dy}{dt}$$

Integrando:

$$\sqrt{g}\int_0^T dt = \int_0^L \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{L} \rightarrow T = 2\sqrt{\frac{L}{g}}$$
